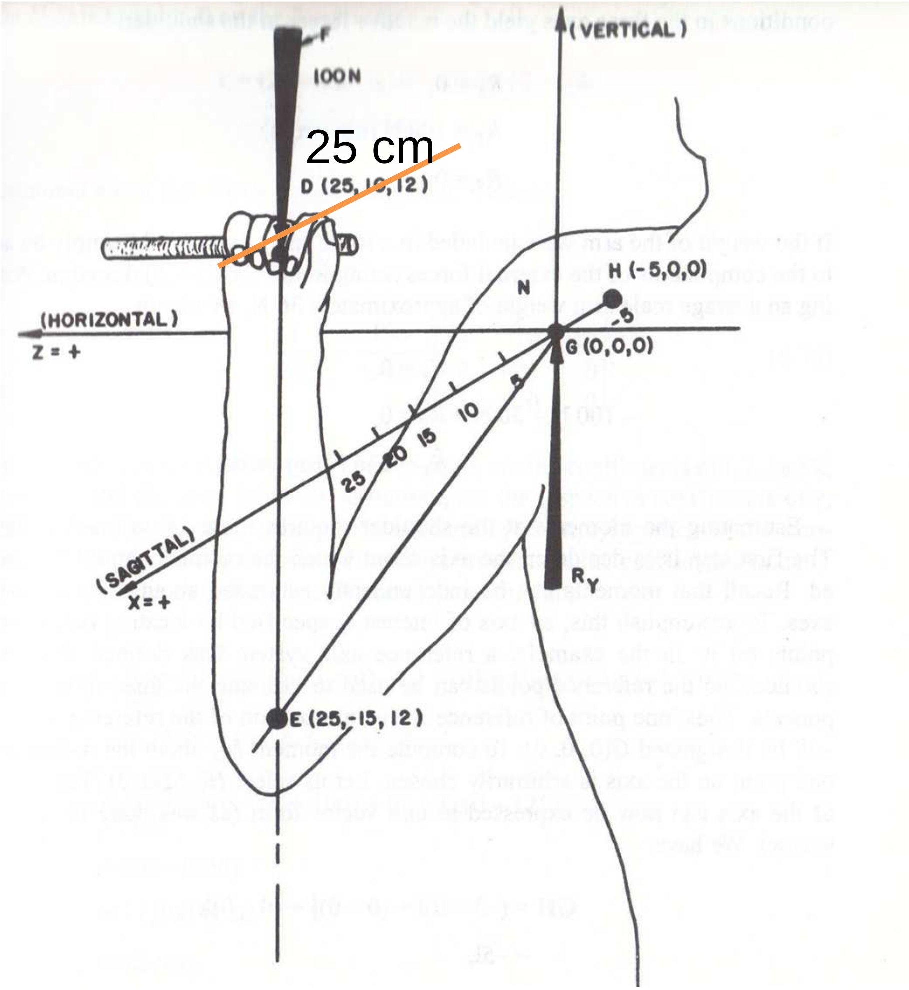
Elementi di Biomeccanica
Statica, Cinetica,
Esercizi sull'analisi delle forze

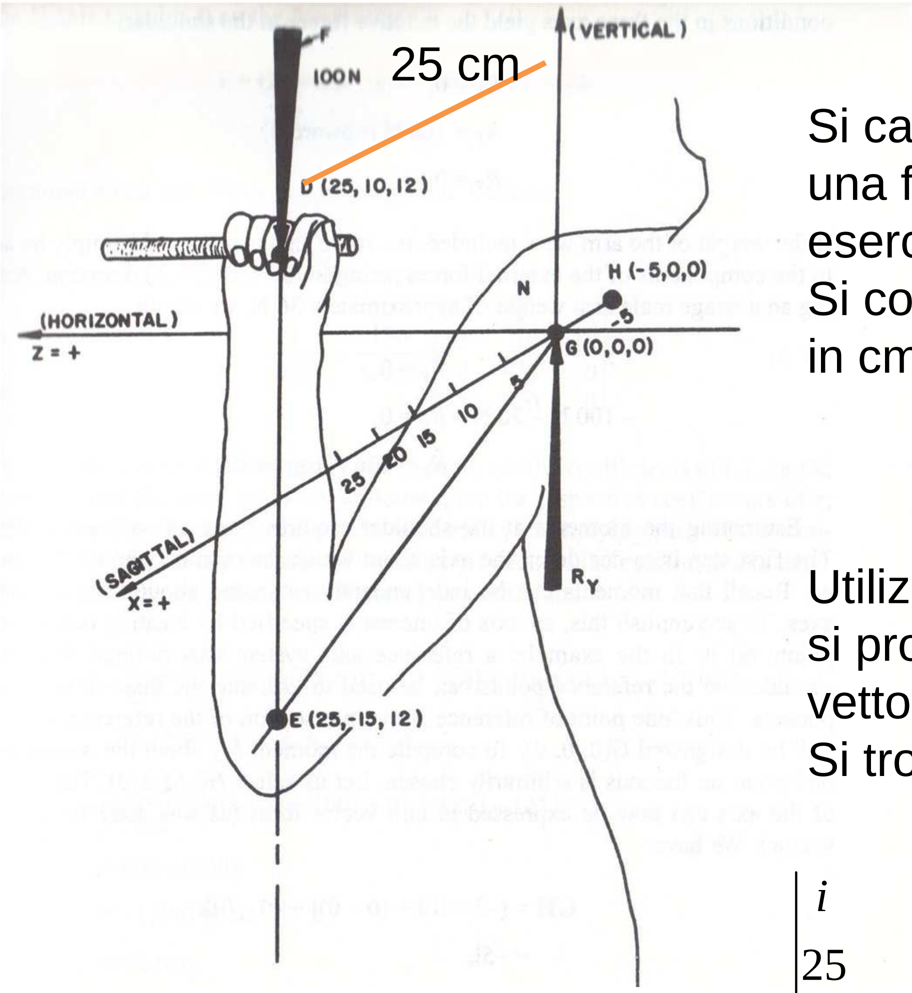
PERCRO Perceptual
Robotics Laboratory

Calcolo dei momenti articolari



Si calcoli la coppia articolare che una forza verticale di 100 N esercitata a livello della spalla
Si considerino le distanze indicate in cm e le forze in N

$$F = [0, -100, 0]\ N$$
$$(D - G) = [25, 10, 12]\ cm$$



Si calcoli la coppia articolare che una forza verticale di 100 N esercitata a livello della spalla
Si considerino le distanze indicate in cm e le forze in N

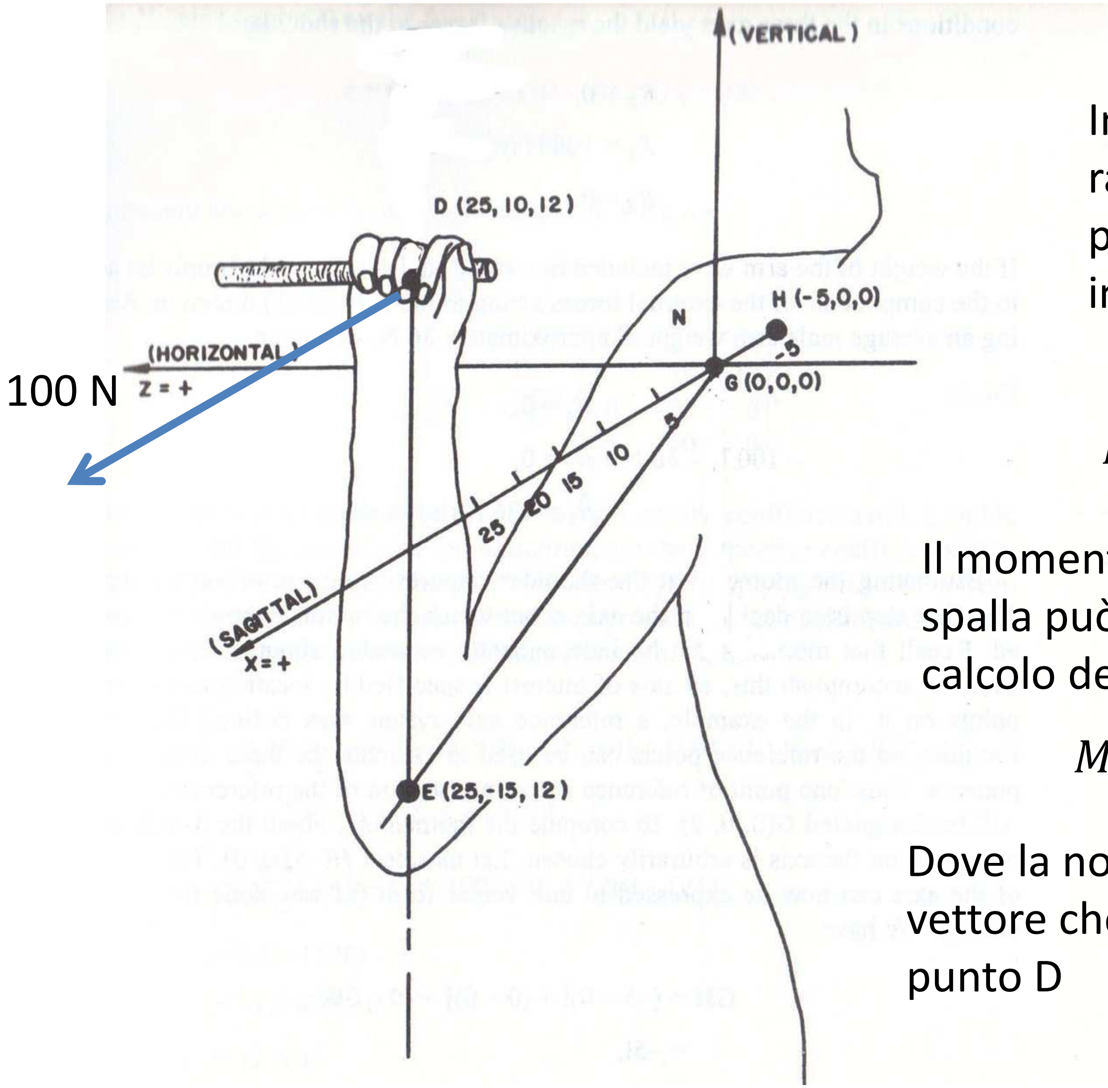
$$F = [0, -100, 0]\ N$$
$$(D - G) = [25, 10, 12]\ cm$$

Utilizzando le dimensioni riportate si procede calcolando prodotto vettoriale
Si trova pertanto per

$$M = (D-G) \wedge F$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 25 & 10 & 12 \\ 0 & -100 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1200 \\ 0 \\ -2500 \end{bmatrix} Ncm = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix} Nm$$

Sollecitazione diversa



In questo caso la sollecitazione rappresenta una forza diretta in avanti, per cui nel sistema di riferimento indicato

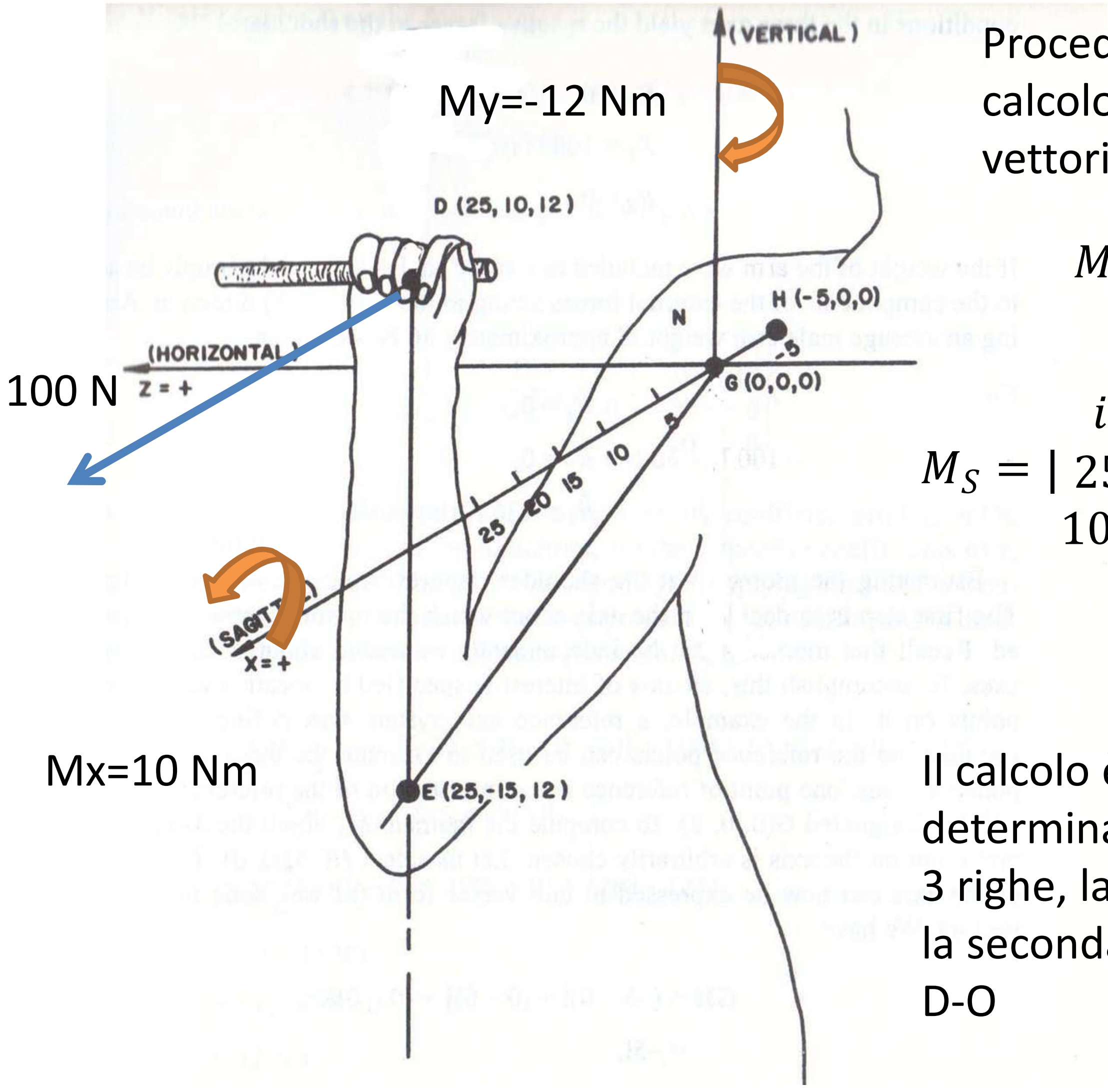
$$F = [100,0,0]$$
$$D = [25,10,12]$$

Il momento articolare a livello della spalla può essere calcolato mediante il calcolo del momento come

$$M_S = (D - O) \wedge F$$

Dove la notazione indica con (D-O) il vettore che congiungere il punto O al punto D

Sollecitazione diversa



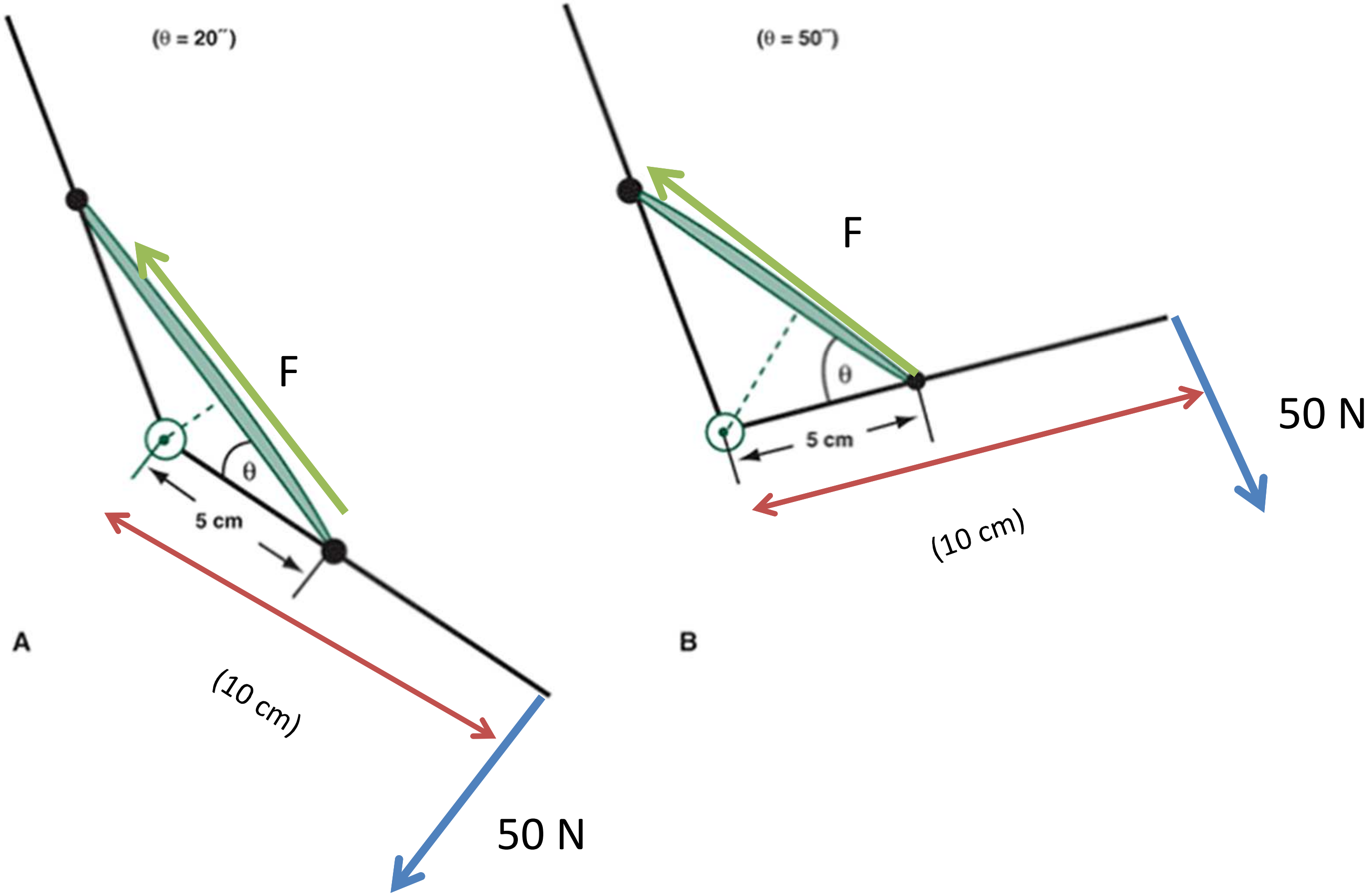
Procedendo nello svolgimento del calcolo usando la definizione di prodotto vettoriale, troviamo che

$$M_S = (D - O) \wedge F$$

$$M_S = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 25 & 10 & 12 \\ 100 & 0 & 0 \end{vmatrix} Nm$$

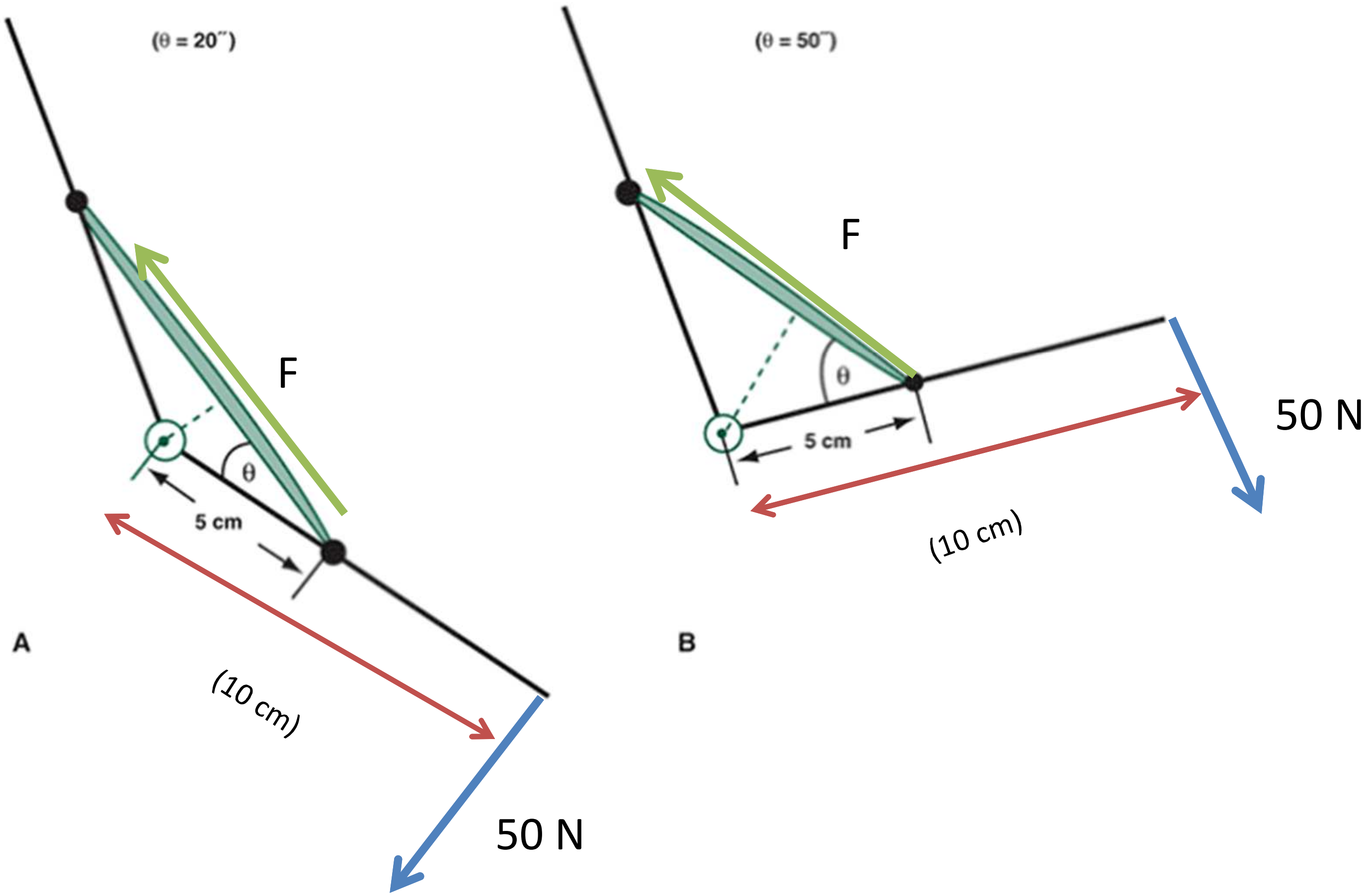
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -12x100 \\ 10x100 \end{bmatrix} Ncm = = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 10 \end{bmatrix} Nm$$

Il calcolo è equivalente a calcolare il determinante della matrice composta da 3 righe, la prima contenente i tre versori, la seconda la forza F e la terza il vettore D-O



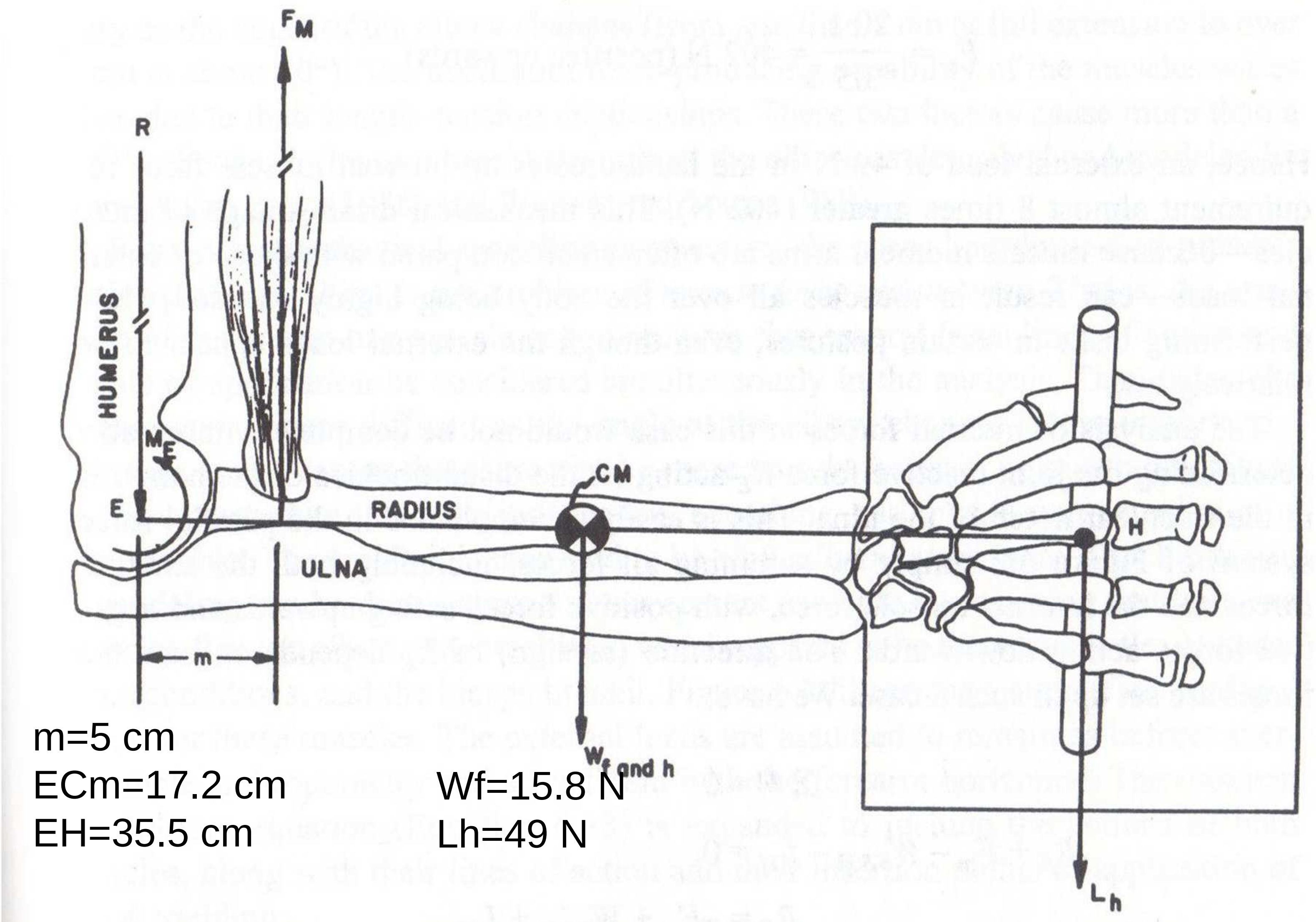
Si calcoli la forza muscolare richiesta per bilanciare la forza in questi due casi
Per l'equilibrio intorno al gomito è sufficiente imporre l'equilibrio delle due forze agenti.

$$F \sin(\text{theta}) \times 5 \text{ cm} = 50 \text{ N} \times 10 \text{ cm} \Rightarrow F = 100/ \sin(\text{theta}) \text{ N}$$



E’ chiaro che la forza è tanto maggiore quanto più piccolo è l’angolo theta in quanto nei due casi abbiamo rispettivametne.

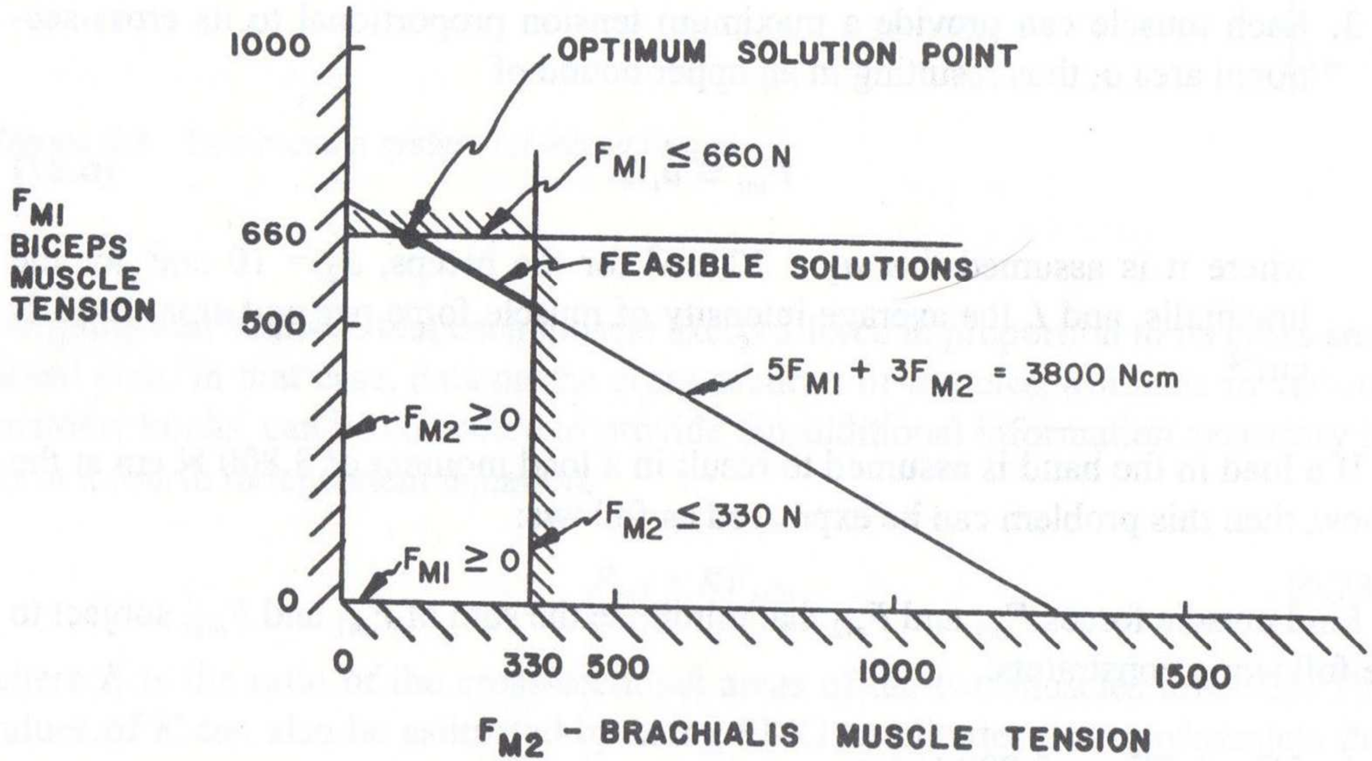
$\boxed{F = 100/\sin(20\text{ deg})\text{ N} = 292\text{ N}}$ $\boxed{F = 100/\sin(50\text{ deg})\text{ N} = 130\text{ N}}$

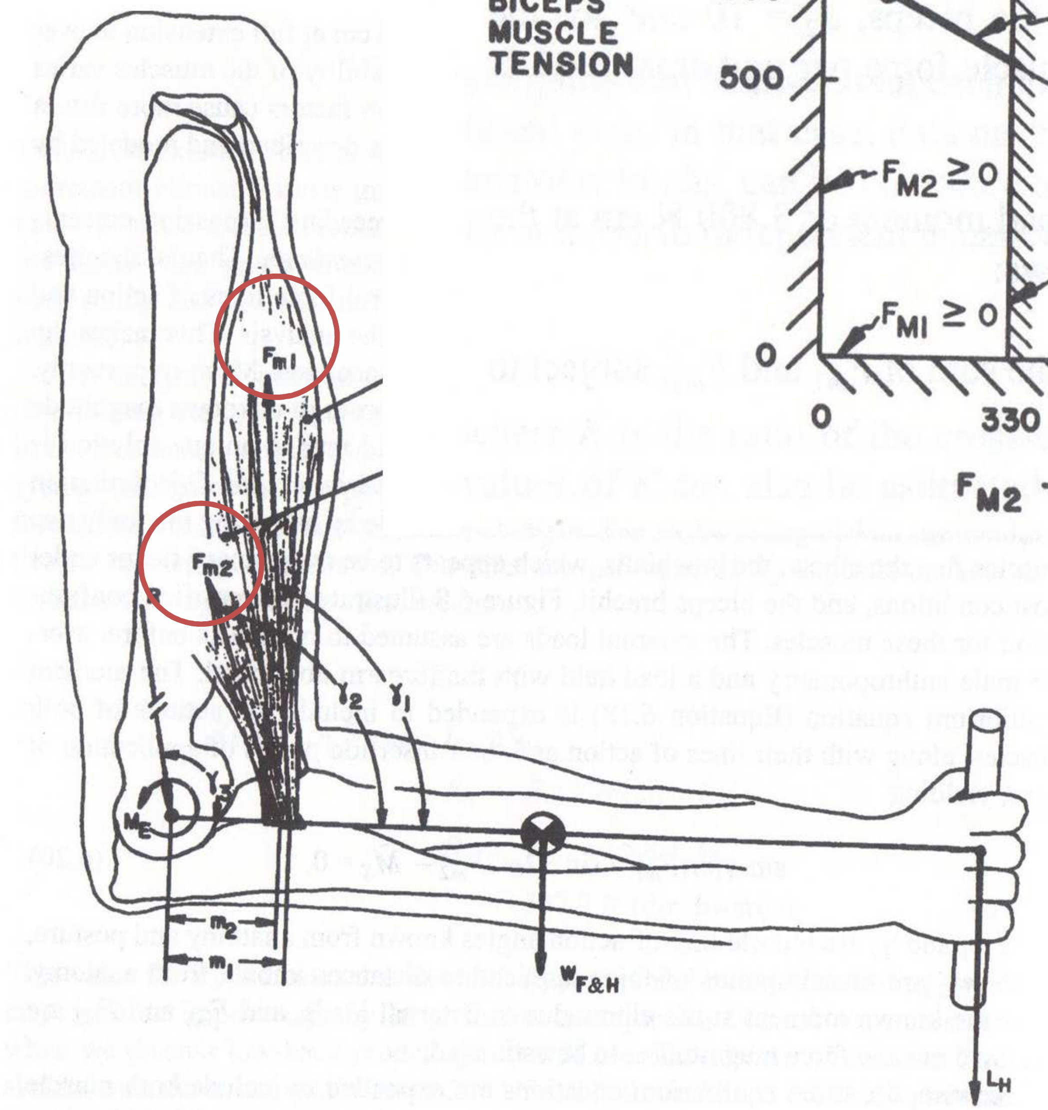


m=5 cm
ECm=17.2 cm
EH=35.5 cm

Wf=15.8 N
Lh=49 N

Wf x Ecm + Lh x EH= Fm x m= (15.8 x 17.2 N cm+ 49 x 35.5 N cm)= 20.1 Nm

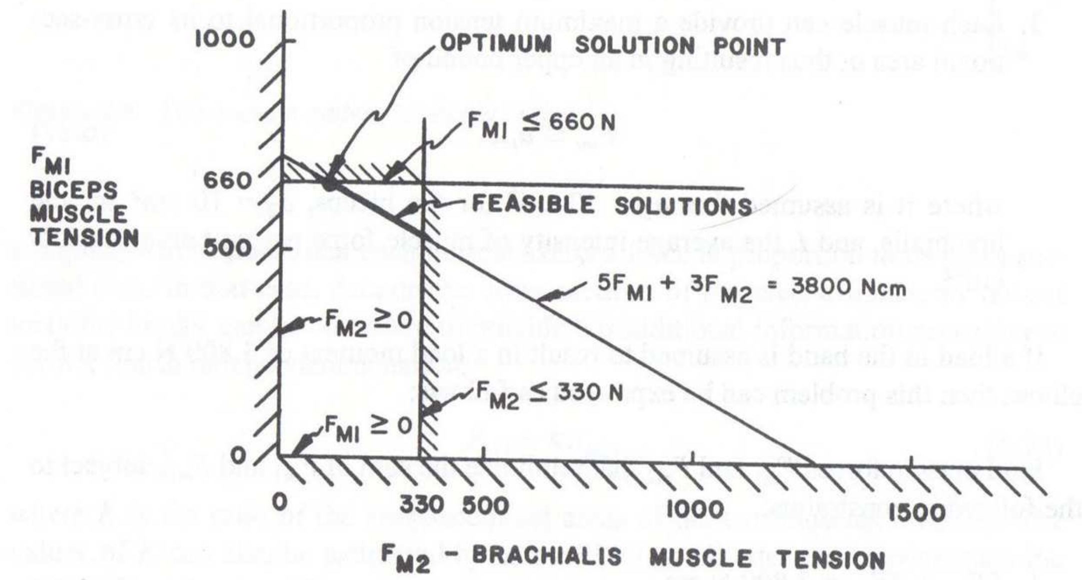




In questa slide viene affrontato il problema della ripartizione della coppia articolare su due muscoli, in questo caso indicati come Fm1 ed Fm2

Si consideri che la risultante dei carichi produca un momento pari a 3800 Ncm

Rappresentazione grafica dell'equilibrio delle forze

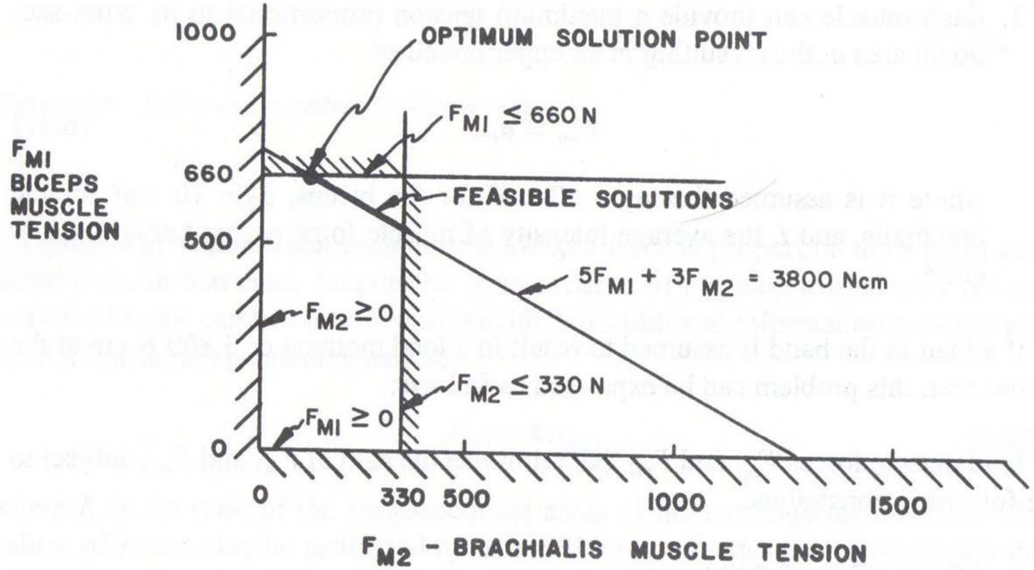


L'equazione di equilibrio ci dice pertanto che in generale deve essere

$$\begin{cases} 5F_{m1} + 3F_{m2} = 3800\ Ncm \\ F_{m1} \le 660N \\ F_{m2} \le 330N \end{cases}$$

- La prima condizione ci da l'equilibrio al momento delle due forze agenti con bracci m1 ed m2, nel nostro caso assunti pari a 5 e 3 cm rispettivamente. Il secondo termine è il momento risultante del peso del braccio legato a W_{FH} ed alla forza L_H .
- Il secondo e terzo termine ci dicono i valori massimi che possono essere raggiunti dalle due forze muscolari

E’ chiaro che il problema risulta indeterminato per cui è necessario introdurre un criterio di ottimo.



Supponiamo che questo sia la minimizzazione della somma delle due forze $F_{m1} + F_{m2}$ ossia trovare il minimo della funzione $F_{m1} + F_{m2}$ soggetta ai vincoli

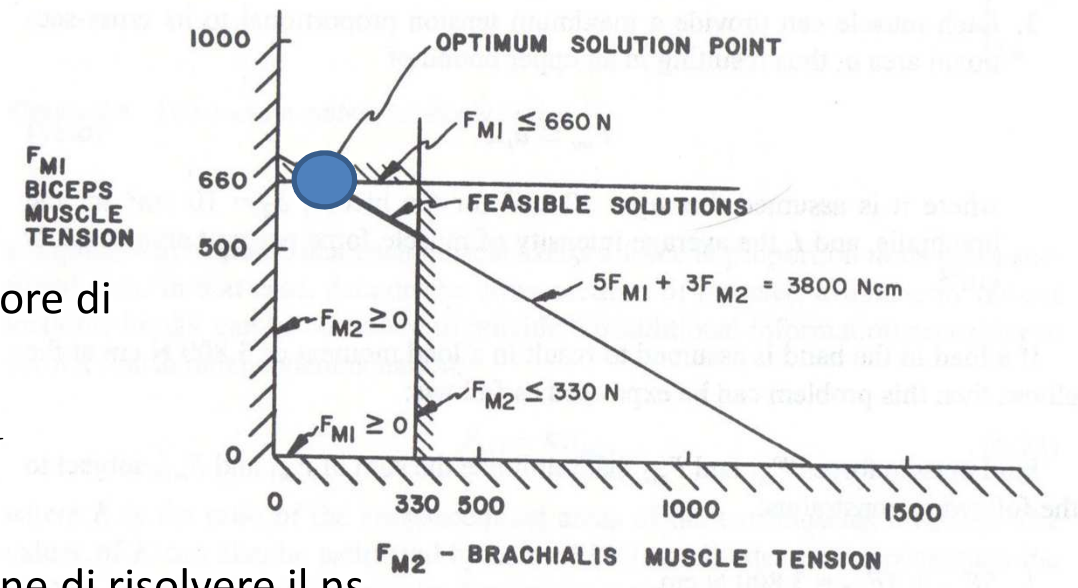
$$\begin{cases} 5F_{m1} + 3F_{m2} = 3800\ Ncm \\ F_{m1} \leq 660N \\ F_{m2} \leq 330N \end{cases}$$

Facciamo allora l’ipotesi di scrivere la nostra funzione da minimizzare in funzione di Fm2 nel modo seguente, sostituendo Fm1 data dalla prima relazione

$$F_{m1} + F_{m2} = F_{m1} - \frac{5}{3}F_{m1} + \frac{3800}{3}\text{N} = -\frac{2}{3}F_{m1} + 1266.7\text{ N}$$

Questa funzione è una retta rispetto ad Fm1 (con coeff negativo), per cui ci dici che il minimo si raggiunge per il valore più grande di Fm1, ovvero Fm1=660N.

$$\begin{cases} 5F_{m1} + 3F_{m2} = 3800\ Ncm \\ F_{m1} \leq 660N \\ F_{m2} \leq 330N \end{cases}$$



Procediamo allora con il sostituire il valore di Fm2=660 N e troviamo che

$$F_{m1} + F_{m2} = -\frac{2}{3} 660\text{N} + 1266.7\ \text{ N= 826.6 N}$$

Siamo in grado allora con questa equazione di risolvere il ns problema. Abbiamo due equazioni in due incognite, un sistema lineare

$$\begin{cases} 5F_{m1} + 3F_{m2} = 3800 \\ F_{m1} + F_{m2} = 826.6 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la seconda equazione per 5, e sottraiamo la prima equazione alla seconda per ottenere il valore di Fm2

$$\begin{cases} 5F_{m1} + 3F_{m2} = 3800 \\ 5F_{m1} + 5F_{m2} = 4133\ N \end{cases}$$

$$F_{m2} = \frac{4133 - 3800}{2}\ N = 166.5\ N$$